

Experimento 11

LENTE Y ESPEJOS ESFÉRICOS

Objetivos

1. Resolver ejercicios de formación de imágenes en espejos y lentes esféricas, y
2. Verificar experimentalmente la ecuación de Gauss para lentes convergentes esféricas y delgadas

Teoría

La óptica geométrica estudia la propagación de la luz asumiendo que viaja como si se tratara de rayos rectos que solamente se desvían cuando sufren reflexión especular, o cuando encuentran la interfaz entre dos medios transparentes (refracción). En un ejercicio anterior estudiamos las leyes de la reflexión y la refracción. En este ejercicio vamos a estudiar cómo se reflejan los rayos luminosos en espejos esféricos y cómo se refractan en lentes delgadas. Tanto los espejos, como las lentes, son esféricas porque sus superficies reflectoras, o refractoras, son cascos esféricos, es decir, provienen de esferas

Espejos esféricos

Las figuras 1 (a) y (b) muestran un espejo esférico cóncavo a la izquierda, y uno convexo a la derecha. La línea horizontal sobre la cual se ubican los puntos C y F es el eje principal de cada espejo. En ambos casos tenemos un objeto, situado frente a cada espejo, representado por una flecha derecha de longitud ℓ . La distancia desde la flecha hasta el espejo está representada por d_o . Se define la distancia focal f , como aquella que existe entre un punto llamado foco, identificado como F en cada figura, y el vértice del espejo. Esta distancia es igual a la mitad del radio de la superficie esférica y su importancia estriba en que un haz luminoso, que incide sobre el espejo, viajando paralelamente al eje principal, se refleja pasando por este punto, si el espejo es cóncavo, o como si saliera de este punto, si el espejo es convexo. La distancia focal es positiva para espejos cóncavos y negativa para espejos convexos. El radio de curvatura de cada espejo se define con la letra r . La ubicación de la imagen se encuentra a una distancia d_i . Las distancias del objeto al espejo, de la imagen al espejo, y la distancia focal están relacionadas entre sí según la siguiente fórmula establecida por Gauss,

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

El tamaño de la imagen se relaciona con el del objeto a través de la ecuación,

$$m = \frac{\ell'}{\ell} = -\frac{d_i}{d_o}$$

Donde ℓ' es el tamaño de la imagen, y m su amplificación. Si $|m| > 1$, la imagen es mayor que el objeto, de lo contrario es menor. Si $m > 0$, la imagen es derecha, de lo contrario, invertida

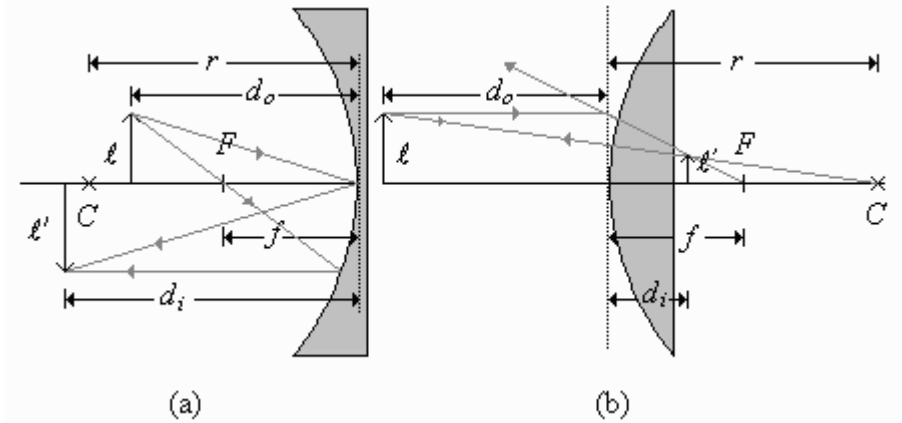


Figura 1 Formación de imágenes en espejos cóncavos y convexos

Ejemplo 1

Sea un espejo cóncavo con una distancia focal $f = 12$ cm. Un objeto, cuya longitud es de 5 cm, se encuentra a una distancia $d_o = 20$ cm frente al espejo. Encuentre la posición de la imagen y su longitud, y explique las siguientes características: (1) Su tamaño, (2) Si está derecha o invertida, y (3) Si es real o virtual. (En la solución expuesta en seguida discutiremos lo que son imágenes reales y virtuales)

Solución: Conocemos los valores de dos de las tres variables de la ecuación de Gauss: d_o y f . Necesitamos encontrar el valor de la única variable desconocida, d_i , así que la dejamos de la ecuación y sustituimos los valores dados,

$$d_i = \frac{fd_o}{d_o - f} = \frac{12 \times 20}{20 - 12} = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}$$

Calculamos la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{30}{20} = -1.5$$

Por lo tanto, $\ell' = m\ell = (-1.5)(5) = -7.5$ cm. (1) En cuanto a su tamaño, vemos que la amplificación tiene un valor absoluto mayor que la unidad, lo que significa que la imagen es mayor que el objeto. (2) Por otro lado, en cuanto a si está derecha o invertida, vemos que m es menor que cero, lo cual significa que la imagen está invertida. (3) Por lo que respecta a si la imagen es real o virtual, esto depende de si d_i es positiva o negativa. De ser positiva, la imagen es real. De lo contrario, virtual. En este ejemplo es real

El ejemplo 1 describe una situación similar a la de la figura 1 (a). Notemos que la aplicación de las dos ecuaciones provistas produce resultados acordes con la figura

Ejemplo 2

Sea un espejo convexo con una distancia focal $f = -12$ cm. Un objeto, cuya longitud es de 5 cm, se encuentra a una distancia $d_o = 20$ cm frente al espejo. Encuentre la posición de la imagen y su longitud, y explique sus características: (1) Su tamaño, (2) Si está derecha o invertida, y (3) Si es real o virtual

Solución: Nuevamente conocemos los valores de dos de las tres variables de la ecuación de Gauss. Note, sin embargo, que en este caso, por tratarse de un espejo convexo, la distancia focal es negativa. De cualquier forma, necesitamos encontrar el valor de la única variable desconocida, así que la despejamos de la ecuación y sustituimos los valores dados,

$$d_i = \frac{fd_o}{d_o - f} = \frac{-12 \times 20}{20 - (-12)} = \frac{-240}{32} = -7.5 \text{ cm}$$

Calculamos la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-7.5}{20} = 0.375$$

Por lo tanto, $\ell' = m\ell = (0.375)(5) = 1.875 \text{ cm}$. (1) En cuanto a su tamaño, vemos que la amplificación tiene un valor absoluto menor que la unidad, lo que significa que la imagen es menor que el objeto. (2) Por otro lado, en cuanto a si está derecha o invertida, vemos que m es mayor que cero, lo cual significa que la imagen está derecha. (3) Por lo que respecta a si la imagen es real o virtual, vemos que la distancia d_i es negativa, por lo tanto, la imagen es virtual

El ejemplo 2 describe una situación similar a la de la figura 1 (b). Notemos que la aplicación de las dos ecuaciones provistas produce resultados acordes con la figura

Ejercicio 1

En la siguiente tabla tenemos algunos datos para un espejo cóncavo y uno convexo. Usted debe completar las celdas vacías de la tabla 1 usando los datos conocidos y las ecuaciones correspondientes. En cada caso haga los dibujos como los de las figuras 1 (a) y (b) y compruebe que estos dibujos están de acuerdo con los resultados numéricos

Tabla 1. Datos para espejos

Variables	Cóncavo	Convexo
f	10 cm	-20 cm
d_o	30 cm	
d_i		-4 cm
m		
¿Imagen real o virtual?		
¿Imagen derecha o invertida?		
¿Imagen agrandada o reducida?		

Respuestas: Espejo cóncavo, 15 cm, $-\frac{1}{2}$, real, invertida, reducida. Espejo convexo, 5 cm, 0.8, virtual, derecha, reducida

Lentes esféricos delgados

La figura 2 muestra un lente convergente, esférico y delgado. La línea horizontal sobre la cual se ubican los puntos C , F , F' y C' es el eje principal del lente. Al lado izquierdo hay un objeto, situado frente al lente, representado por una flecha derecha de longitud ℓ . La distancia desde la flecha hasta el lente está representada por d_o . Se define la distancia focal f , como aquella que existe entre un punto llamado foco, identificado como F en la figura 2, y el centro del lente. Note que en los lentes delgados hay dos focos, situados simétricamente a cada lado. La distancia focal es igual a la mitad del radio de la superficie esférica y su importancia estriba en que un haz luminoso que incide sobre el lado izquierdo del lente, viajando paralelamente al eje principal, se refracta pasando por F' , si el lente es convergente, o como si saliera de F , si el lente es divergente. La distancia focal es positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes. El radio de curvatura del lente se define con la letra r . La ubicación de la imagen se encuentra a una distancia d_i . Las distancias del objeto al lente, de la imagen al lente, y la distancia focal están relacionadas entre sí según la misma fórmula establecida por Gauss, para espejos esféricos, estudiada anteriormente. La ecuación para la amplificación, m , es también la misma que en los espejos

Ejemplo 3

Sea un lente convergente delgado con una distancia focal $f = 16$ cm. Un objeto, cuya longitud es de 10 cm, se encuentra a una distancia $d_o = 40$ cm frente al lente. Esta situación es similar a la de la figura 2. Encuentre la posición de la imagen y su longitud, y explique las siguientes características: (1) Su tamaño, (2) Si está derecha o invertida, y (3) Si es real o virtual

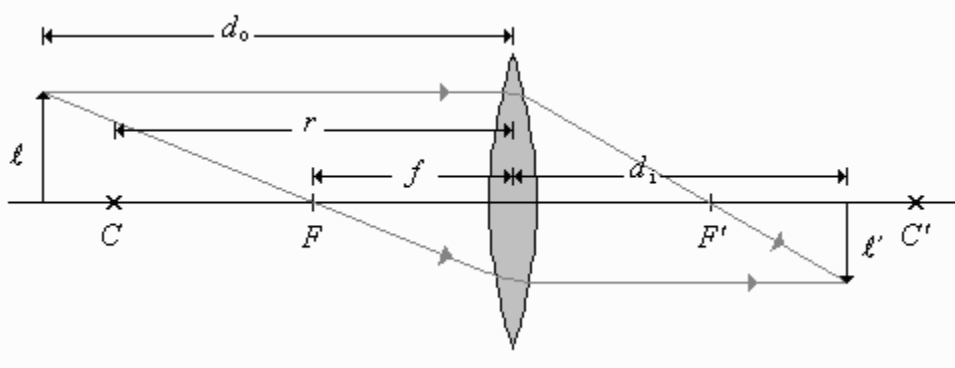


Figura 2 Formación de la imagen en un lente convergente

Solución: Dijimos que la ecuación que relaciona la distancia del objeto al lente, del lente a la imagen y la distancia focal, es la misma ecuación de Gauss que usamos con los espejos, por lo tanto, conocemos los valores de dos de sus tres variables: d_o y f , y necesitamos encontrar el valor de la única variable desconocida, d_i , así que la despejamos de la ecuación y sustituimos los valores dados,

$$d_i = \frac{fd_o}{d_o - f} = \frac{15 \times 40}{40 - 15} = \frac{600}{25} = 24 \text{ cm}$$

Calculamos la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{24}{40} = -0.6$$

Por lo tanto, $\ell' = m\ell = (-0.6)(10) = -6$ cm. (1) En cuanto a su tamaño, vemos que la amplificación tiene un valor absoluto menor que la unidad, lo que significa que la imagen es menor que el objeto. (2) Por otro lado, en cuanto a si está derecha o invertida, vemos que m es menor que cero, lo cual significa que la imagen está invertida. (3) Por lo que respecta a si la imagen es real o virtual, igual que en el caso de los espejos, esto depende de si d_i es positiva o negativa. De ser positiva, la imagen es real, de lo contrario, virtual. En este ejemplo es real

Como dijimos anteriormente, el ejemplo 3 describe una situación similar a la de la figura 2. Notemos que la aplicación de las dos ecuaciones provistas produce resultados acordes con la figura

Ejemplo 4

Sea un lente divergente con una distancia focal $f = -16$ cm. Un objeto, cuya longitud es de 10 cm, se encuentra a una distancia $d_o = 24$ cm frente al lente. Encuentre la posición de la imagen y su longitud, y explique sus características: (1) Su tamaño, (2) Si está derecha o invertida, y (3) Si es real o virtual. Haga el dibujo correspondiente y compruebe si sus resultados están de acuerdo con los cálculos numéricos. Ver la figura 3

Solución: Nuevamente conocemos los valores de dos de las tres variables de la ecuación de Gauss. Note, sin embargo, que en este caso, por tratarse de un lente divergente, la distancia focal es negativa. De cualquier forma, necesitamos encontrar el valor de la única variable desconocida, así que la despejamos de la ecuación y sustituimos los valores dados,

$$d_i = \frac{fd_o}{d_o - f} = \frac{-16 \times 24}{24 - (-16)} = \frac{-384}{40} = -9.6 \text{ cm}$$

Calculamos la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-9.6}{24} = 0.4$$

Por lo tanto, $\ell' = m\ell = (0.4)(10) = 4$ cm. (1) En cuanto a su tamaño, vemos que la amplificación tiene un valor absoluto menor que la unidad, lo que significa que la imagen es menor que el objeto. (2) Por otro lado, en cuanto a si está derecha o invertida, vemos que m es mayor que cero, lo cual significa que la imagen está derecha. (3) Por lo que respecta a si la imagen es real o virtual, igual que en el caso de los espejos, esto depende de si d_i es positiva o negativa. De ser positiva, la imagen es real, de lo contrario, virtual. En este ejemplo es virtual

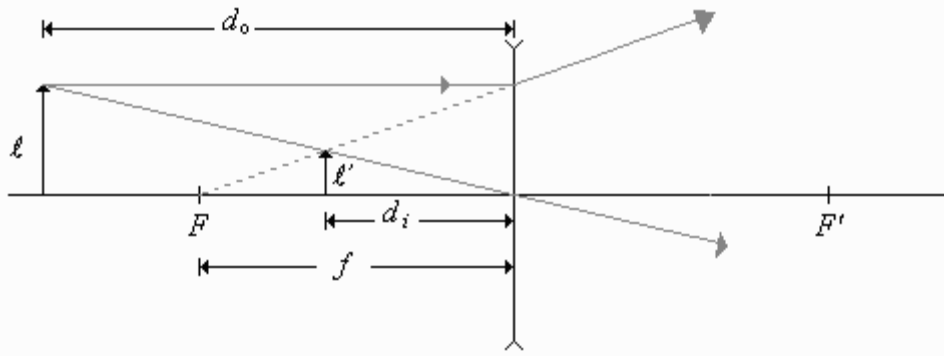


Figura 3 Formación de una imagen virtual en un lente divergente

La figura 3 muestra la situación descrita en el ejemplo 4. Notemos que representa fielmente lo que obtuvimos en los resultados numéricos. Note que por simplicidad, y por tratarse de un lente delgado, hemos sustituido el dibujo del lente por una línea con dos flechas invertidas en sus extremos, lo que se usa comúnmente para representar este tipo de lentes. Si el lente fuera convergente, las puntas de las flechas no estarían invertidas

Ejercicio 2

En la tabla 2 tenemos algunos datos para un lente convergente y uno divergente. Usted debe completar las celdas vacías de esa tabla usando los datos conocidos y las ecuaciones correspondientes. En cada caso haga los dibujos como los de las figuras 2 y 3 y compruebe que estos dibujos están de acuerdo con los resultados numéricos

Respuestas: Lente convergente, 20 cm, - 1, real, invertida, del mismo tamaño que el objeto. Lente divergente, -6 cm, 0.6, virtual, derecha, reducida

Tabla 2. Datos para lentes

Variables	Convergente	Divergente
f	10 cm	-15 cm
d_o	20 cm	10 cm
d_i		
m		
¿Imagen real o virtual?		
¿Imagen derecha o invertida?		
¿Imagen agrandada o reducida?		

Materiales y equipo

Un banco óptico,

Pantalla,

Juego de dos lentes convergentes ($f_1 = 100$ mm y $f_2 = 200$ mm) y

Fuente luminosa

Procedimiento

1. Asegúrese de que en su mesa de trabajo está instalado el banco óptico con los accesorios mencionados en el listado de materiales y equipo
2. Coteje si la pantalla está en la posición 0 cm (cero) de la escala del banco óptico. De no ser así, sitúela en esa posición
3. Coteje si la fuente luminosa está en la posición 100 cm de la escala del banco óptico. De no ser así, sitúela en esa posición
4. Asegúrese de que la fuente luminosa tiene el dibujo de dos flechas perpendiculares, en su cara frontal
5. Note que hay un lente convergente en el banco óptico situado entre la fuente luminosa y la pantalla. Ver la figura 4

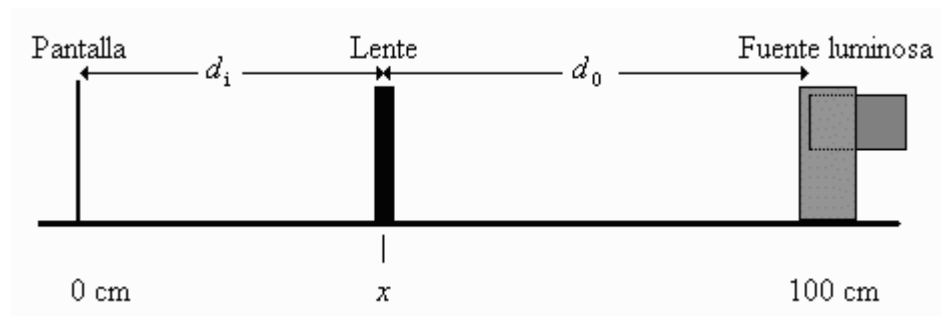


Figura 4 Para formar una imagen nítida en la pantalla ajustamos la posición del lente

6. Encienda la fuente luminosa y mueva el lente hacia la pantalla, o alejándolo de ella, hasta formar una imagen nítida de las flechas
7. Mida los valores de las distancias d_o y d_i y escríbalos en su hoja de informe junto con la distancia focal, que está escrita en el soporte del lente
8. Repita los pasos 5 y 6 para otra posición del lente hasta formar una nueva imagen, sin alterar las posiciones originales de la pantalla y la fuente luminosa
9. Haga el cálculo de las dos distancias d_i usando la fórmula de Gauss de los lentes delgados y los valores medidos de las dos distancias d_o y compárelos con los valores medidos
10. Compruebe si las imágenes tienen las características esperadas de tamaño, derechas o invertidas y reales o virtuales, predichas por la teoría
11. Repita el experimento anterior cambiando el lente por otro con una distancia focal diferente

Preguntas

Conteste correctamente antes de hacer el experimento

1. La óptica geométrica estudia:
 - a. La propagación de la luz como si se tratara de un fenómeno ondulatorio,
 - b. La geometría de los lentes y espejos esféricos,
 - c. La propagación de la luz asumiendo que viaja como si se tratara de rayos rectos,
 - d. Todo lo relacionado con la luz, o
 - e. Las leyes de los instrumentos ópticos

2. En la óptica geométrica los rayos de luz:
 - a. Siguen trayectorias curvilíneas,
 - b. Son frentes de ondas esféricas,
 - c. Se desvían solamente cuando sufren reflexión especular o cuando encuentran la interfaz entre dos medios transparentes,
 - d. Nunca sufren desviación, o
 - e. Resultan de la reflexión difusa

3. Decimos que un espejo es esférico:
 - a. Cuando es una esfera,
 - b. Porque es capaz de refractar la luz,
 - c. Porque tiene un centro y un radio,
 - d. Porque su superficie reflectora es parte de un casco esférico, o
 - e. Cuando su perímetro es circular

4. La línea horizontal que aloja a los puntos C y F de un espejo:
 - a. Es su eje principal,
 - b. Cambia con la distancia del objeto,
 - c. Es un rayo de luz,
 - d. Tiene otros puntos C y F detrás del espejo, o
 - e. No aloja a ningún punto de interés

5. La distancia focal de un lente o espejo esféricos:
 - a. Es el doble del radio,
 - b. Es igual al radio,
 - c. Es la distancia que existe entre el centro de curvatura del espejo y cualquier punto de su superficie reflectora,
 - d. Varía con la distancia de la imagen, o
 - e. Es la mitad del radio

6. Las distancias del objeto al lente, del lente a la imagen y la focal:
 - a. Son constantes para cada lente,
 - b. Están relacionadas entre sí según una fórmula descubierta por Gauss,
 - c. Son negativas en los lentes divergentes,
 - d. Son virtuales, o
 - e. Dependen de la amplificación de la imagen

7. Cuando la amplificación de una imagen formada por un espejo esférico es negativa implica que la imagen:
 - a. Es virtual,
 - b. Está reducida con respecto al objeto,
 - c. Está derecha,
 - d. Está invertida, o
 - e. No existe

8. Cuando el valor absoluto de la amplificación de una imagen formada por un lente esférico es menor que la unidad implica que la imagen:
 - a. Es virtual,
 - b. No existe,
 - c. Está derecha,
 - d. Está invertida, o
 - e. Está reducida con respecto al objeto

9. Cuando el valor de la distancia desde la imagen al lente es negativa implica que la imagen:
 - a. Es virtual,
 - b. No existe,
 - c. Está derecha,
 - d. Está invertida, o
 - e. Está reducida con respecto al objeto

10. Los lentes esféricos pueden ser:
 - a. Planos,
 - b. Convergentes,
 - c. Convexos,
 - d. Cóncavos, o
 - e. Parabólicos

11. En la tabla 3 tenemos algunos datos para un espejo cóncavo y uno convexo. Usted debe completar las celdas vacías de la tabla usando los datos conocidos y las ecuaciones correspondientes

Tabla 3

Variables	Cóncavo	Convexo
F	10 cm	-20 cm
d_0	30 cm	
d_i		-4 cm
M		
¿Imagen real o virtual?		
¿Imagen derecha o invertida?		
¿Imagen agrandada o reducida?		

12. En la tabla 4 tenemos algunos datos para un lente convergente y uno divergente. Usted debe completar las celdas vacías de la tabla usando los datos conocidos y las ecuaciones correspondientes

Tabla 4

Variables	Convergente	Divergente
f	10 cm	-15 cm
d_0	20 cm	10 cm
d_i		
m		
¿Imagen real o virtual?		
¿Imagen derecha o invertida?		
¿Imagen agrandada o reducida?		

Informe del Experimento 11. Lentes y espejos esféricos

Sección _____ Mesa _____

Fecha: _____

Estudiantes:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

Primer lente. Primera imagen

Distancia focal, $f =$ _____ cm

1. Enfoque la imagen de las flechas sobre la pantalla ajustando cuidadosamente la posición del lente. Muévelo hacia la pantalla o hacia la fuente luminosa hasta obtener una imagen nítida
2. Anote en seguida la posición del lente según identificada en la cinta métrica del banco óptico. Ver la figura 4
3. Posición del lente $x =$ _____ cm
4. Escriba el valor de la distancia $d_i =$ _____ cm. Note que este valor es la posición del lente. Este es el valor medido
5. Escriba el valor de la distancia $d_o =$ _____ cm. Note que este valor es $100 - x$
6. Use la ecuación de Gauss para calcular el valor esperado de d_i dados f y d_o . Muestre sus cálculos en el espacio provisto abajo

7. Calcule la diferencia relativa porcentual $\Delta\%$ entre las distancias d_i medida y calculada

$$\Delta\% = \frac{|d_{i, medida} - d_{i, calculada}|}{d_{i, calculada}} \times 100 =$$

8. Calcule el valor de la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \underline{\hspace{2cm}}$$

9. De acuerdo con los resultados teóricos determine cómo debe ser la imagen en cuanto a su tamaño, si es derecha o invertida y real o virtual ¿Concuerdan estos resultados teóricos con lo que obtuvo en el ejercicio?

Sí

No

Primer lente. Segunda imagen

Distancia focal (debe ser la misma que en el primer ejercicio),

$$f = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$$

10. Manteniendo fija la distancia entre la pantalla y la fuente luminosa deslice el lente a todo lo largo del banco hasta formar una nueva imagen en una posición del lente distinta a la anterior. Ajuste la posición del lente moviéndolo hacia la pantalla o hacia la fuente luminosa hasta obtener una imagen nítida

11. Anote en seguida la nueva posición del lente según identificada en la cinta métrica del banco óptico. Ver la figura 4

12. Posición del lente $x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

13. Escriba el valor de la distancia $d_i = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$. Note que este valor es la posición del lente. Este es el valor medido

14. Escriba el valor de la distancia $d_o = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$. Note que este valor es $100 - x$

15. Use la ecuación de Gauss para calcular el valor esperado de d_i dados f y d_o . Muestre sus cálculos en el espacio provisto abajo

16. Calcule la diferencia relativa porcentual $\Delta\%$ entre las distancias d_i medida y calculada

$$\Delta\% = \frac{|d_{i, \text{medida}} - d_{i, \text{calculada}}|}{d_{i, \text{calculada}}} \times 100 =$$

17. Calcule el valor de la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \underline{\hspace{2cm}}$$

18. De acuerdo con los resultados teóricos determine cómo debe ser la imagen en cuanto a su tamaño, si es derecha o invertida y real o virtual ¿Concuerdan estos resultados teóricos con lo que obtuvo en el ejercicio?

Sí

No

Segundo lente. Primera imagen

Distancia focal, $f = \underline{\hspace{2cm}}$ cm

19. Enfoque la imagen de las flechas sobre la pantalla ajustando cuidadosamente la posición del lente. Muévelo hacia la pantalla o hacia la fuente luminosa hasta obtener una imagen nítida

20. Anote en seguida la posición del lente según identificada en la cinta métrica del banco óptico. Ver la figura 4

21. Posición del lente $x = \underline{\hspace{2cm}}$ cm

22. Escriba el valor de la distancia $d_i = \underline{\hspace{2cm}}$ cm. Note que este valor es la posición del lente. Este es el valor medido

23. Escriba el valor de la distancia $d_o = \underline{\hspace{2cm}}$ cm. Note que este valor es $100 - x$

24. Use la ecuación de Gauss para calcular el valor esperado de d_i dados f y d_o . Muestre sus cálculos en el espacio provisto abajo

25. Calcule la diferencia relativa porcentual $\Delta\%$ entre las distancias d_i medida y calculada

$$\Delta\% = \frac{|d_{i, \text{ medida}} - d_{i, \text{ calculada}}|}{d_{i, \text{ calculada}}} \times 100 =$$

26. Calcule el valor de la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \underline{\hspace{4cm}}$$

27. De acuerdo con los resultados teóricos determine cómo debe ser la imagen en cuanto a su tamaño, si es derecha o invertida y real o virtual ¿Concuerdan estos resultados teóricos con lo que obtuvo en el ejercicio?

Sí

No

Segundo lente. Segunda imagen

Distancia focal (debe ser la misma que en el primer ejercicio), $f =$
 cm

28. Manteniendo fija la distancia entre la pantalla y la fuente luminosa deslice el lente a todo lo largo del banco hasta formar una nueva imagen en una posición del lente distinta a la anterior. Ajuste la posición del lente moviéndolo hacia la pantalla o hacia la fuente luminosa hasta obtener una imagen nítida

29. Anote en seguida la nueva posición del lente según identificada en la cinta métrica del banco óptico. Ver la figura 4

30. Posición del lente $x =$ cm

31. Escriba el valor de la distancia $d_i =$ cm. Note que este valor es la posición del lente. Este es el valor medido

32. Escriba el valor de la distancia $d_o =$ _____ cm. Note que este valor es $100 - x$

33. Use la ecuación de Gauss para calcular el valor esperado de d_i dados f y d_o . Muestre sus cálculos en el espacio provisto abajo

34. Calcule la diferencia relativa porcentual $\Delta\%$ entre las distancias d_i medida y calculada

$$\Delta\% = \frac{|d_{i, \text{medida}} - d_{i, \text{calculada}}|}{d_{i, \text{calculada}}} \times 100 =$$

35. Calcule el valor de la amplificación de la imagen,

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \underline{\hspace{2cm}}$$

36. De acuerdo con los resultados teóricos determine cómo debe ser la imagen en cuanto a su tamaño, si es derecha o invertida y real o virtual ¿Concuerdan estos resultados teóricos con lo que obtuvo en el ejercicio?

Sí

No

Conclusiones