Experimento 8

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Objetivos

1. Establecer algunas similitudes entre el movimiento de traslación y el de rotación,
2. Medir la posición, velocidad y aceleración angulares de objetos girando, como función del tiempo, y
3. Medir el momento de inercia de un cuerpo

Teoría

Así como estudiamos el movimiento de un objeto puntiforme que viajaba en línea recta, podemos estudiar el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, de un cuerpo rígido extendido. Por cuerpo extendido entendemos uno sin la restricción de ser puntiforme. Recordemos que, al principio del curso, decidimos analizar el movimiento de objetos puntiformes, como paso inicial al análisis del movimiento de cuerpos extendidos, porque al ser puntiformes no debíamos preocuparnos por su movimiento rotatorio. En este momento ya disponemos de los conocimientos que nos permiten eliminar esa restricción y concentrarnos en el estudio del movimiento rotatorio de objetos no puntiformes. Empezaremos por decir que hay similitudes entre ambos tipos de movimiento y que las podemos usar para facilitar el estudio de las rotaciones. En el movimiento de traslación en una dimensión hablamos de posición, velocidad y aceleración lineales. Asimismo, podemos decir que un punto fijo sobre un cuerpo rígido en rotación tiene posición, velocidad y aceleración angular. A continuación presentamos la Tabla 1 con las variables físicas de cada tipo de movimiento, pareadas según su similitud

Tabla 1. Variables del movimiento de traslación pareadas con las del movimiento de rotación

Movimiento de traslación en una dimensión	Movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo
Posición, x (m)	Posición angular, θ (rad)
Velocidad instantánea, $v = \frac{dx}{dt}$ (m/s)	Velocidad angular instantánea, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (rad/s)
Aceleración instantánea, $a = \frac{dv}{dt}$ (m/s^2)	Aceleración angular instantánea, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ (rad/s^2)
Masa, m (kg)	Momento de inercia, I (kg-m^2)
Momento lineal, $p = mv$ (kg m/s)	Momento angular, $L = I\omega$ (kg-m^2/s)
Fuerza, $F = ma$ (N)	Torque, $\tau = I\alpha$ (N-m)

Añadiremos que, así como hay movimiento de traslación con velocidad constante, lo hay también de rotación con velocidad angular constante y el de aceleración constante en una dimensión, tiene su paralelo en el de aceleración angular constante, y sus ecuaciones son semejantes, como podemos verlo en las tablas 2 y 3 siguientes

Tabla 2. Movimiento con velocidad constante

Ecuaciones de movimiento con velocidad constante	
Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
$x = vt$, con $a = 0$	$\theta = \omega t$, con $\alpha = 0$

Hagamos referencia a la figura 1 para identificar a cada una de las variables físicas relevantes en la definición de torque al final de la tabla 4. El vector $\boldsymbol{\tau}$, al que hemos llamado torque, es el resultado del producto "cruz", o producto vectorial de otros dos vectores: **r** y **F**. Este producto se llama vectorial porque da como resultado un tercer vector, a diferencia del producto "punto" entre dos vectores, que da como resultado un escalar. Recuerde, por ejemplo, la definición de trabajo, W, como el producto escalar de dos vectores: **F** y $d\mathbf{r}$,

$$W = \int \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Tabla 3. Movimiento con aceleración constante

Ecuaciones de movimiento con aceleración constante	
Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$x = \dfrac{v + v_0}{2} t$	$\theta = \dfrac{\omega + \omega_0}{2} t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

Tabla 4. Relaciones entre algunas variables lineales y angulares

Velocidad tangencial	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
Aceleración tangencial	$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$
Aceleración radial	$\mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{r}$
Momento angular	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
Torque	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Por otro lado, volviendo al producto cruz de dos vectores, la magnitud del vector torque se calcula mediante la ecuación,

$$\tau = r\, F \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre los vectores **r** y **F**.

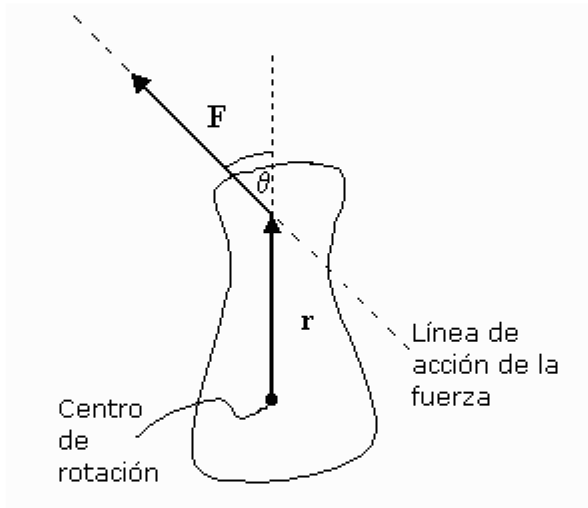

Figura 1 Un cuerpo rígido irregular libre de girar alrededor de un eje

Para encontrar la dirección del vector τ, necesitamos la llamada regla de la mano derecha. Explicaremos esta regla refiriéndonos nuevamente a la figura 1, para calcular el producto vectorial de los dos vectores **r** y **F**. Procedimiento: (1) Recorra o traslade el vector **r** hacia arriba, sin cambiar su dirección, hasta que su extremo inferior coincida con el comienzo del vector **F**. (2) Gire el vector **r** hacia el vector **F** por el ángulo θ. Como en este caso particular la rotación ocurre en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj, el vector τ apunta hacia afuera de la página, en una dirección perpendicular al plano donde se ubican los vectores **r** y **F**. Si las condiciones hubieran sido tales que la rotación de **r** hacia **F** hubiera sido en la dirección de las manecillas del reloj, el vector τ apuntaría hacia adentro de la página. Si representamos con los dedos de la mano derecha el giro de **r** hacia **F**, el pulgar nos indica la dirección de τ. Ver la figura 2. El torque, también llamado el momento de la fuerza, nos permite medir el efecto de la fuerza para producir rotación alrededor del eje correspondiente. Recordemos que cuando hablamos de la fuerza dijimos que es la causa del movimiento de traslación. Del mismo modo, el torque es la causa del movimiento de rotación. También dijimos que la masa es la responsable de la inercia y que el movimiento natural de los cuerpos es el rectilíneo uniforme, caracterizado por tener velocidad constante. Este ocurre por inercia. En el caso de la rotación, el movimiento natural es el de velocidad angular constante, como consecuencia del momento de inercia del cuerpo, según lo explicaremos adelante

En el siguiente enlace de Internet puede ensayar un ejercicio virtual del producto cruz de dos vectores **A** y **B** en el plano, que da por resultado el vector **C**, perpendicular al plano de **A** y **B** . En este enlace usted puede elegir las magnitudes de **A** y **B**, así como el ángulo entre ellos y observar cómo estos afectan el tamaño y dirección de **C:** http://suhep.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html

Ejemplo 1

Empujamos una puerta con una fuerza de 5 N, apoyando la mano a 50 cm del eje de giro, haciendo un ángulo de 60° con el plano de la puerta. Ver la figura 3. Encontrar la magnitud del torque y su dirección

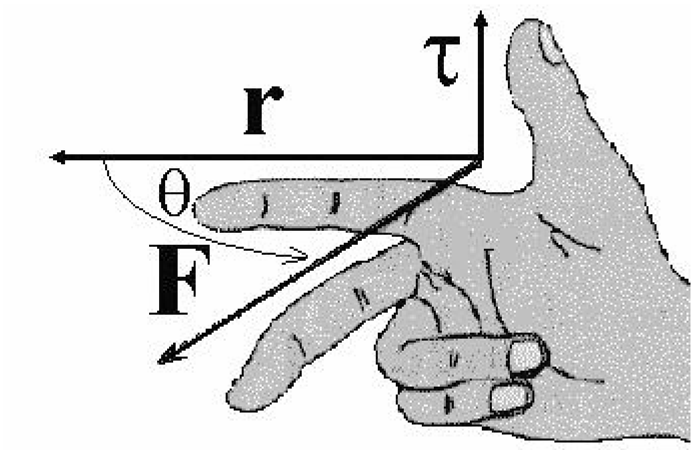

Figura 2 La regla de la mano derecha

Solución: Los vectores de interés son **r** y **F**. Para multiplicarlos vectorialmente necesitamos re-dibujarlos unidos por sus comienzos. Ver la figura 3 (b). En este caso, F tiene un valor de 5 N, r = 50 cm, y $\theta = 60°$. Entones,

$\tau = r\,F\,\mathrm{sen}\theta$ = (0.5 m)(5 N)(sen60°) = (0.5 m)(5 N)(0.866) = 2.17 N-m

La dirección del torque se obtiene con la regla de la mano derecha, colocando los dedos paralelos al vector **r** en posición de girar este vector hacia **F**. En este caso el pulgar apunta hacia el interior de la página

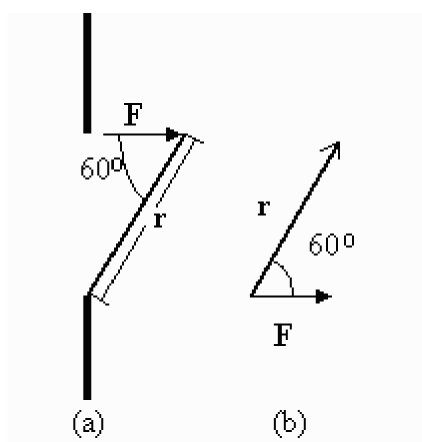

Figura 3 Vista superior de una puerta, a la cual empujamos para abrir

Anteriormente dijimos que la masa se manifiesta como inercia al movimiento de traslación, es decir, como oposición al cambio en la condición de movimiento, o tendencia a mantener el estado de reposo, o de movimiento, con velocidad constante. Similarmente, el momento de inercia es la manifestación de un cuerpo a oponerse a un cambio en su estado de movimiento de rotación. El valor del momento de inercia de cualquier cuerpo está relacionado con su masa y con su geometría, o distribución de esa masa con respecto al eje de rotación. Por ejemplo, un cilindro tiene un momento de inercia diferente para cada eje de rotación. Ver la figura 4

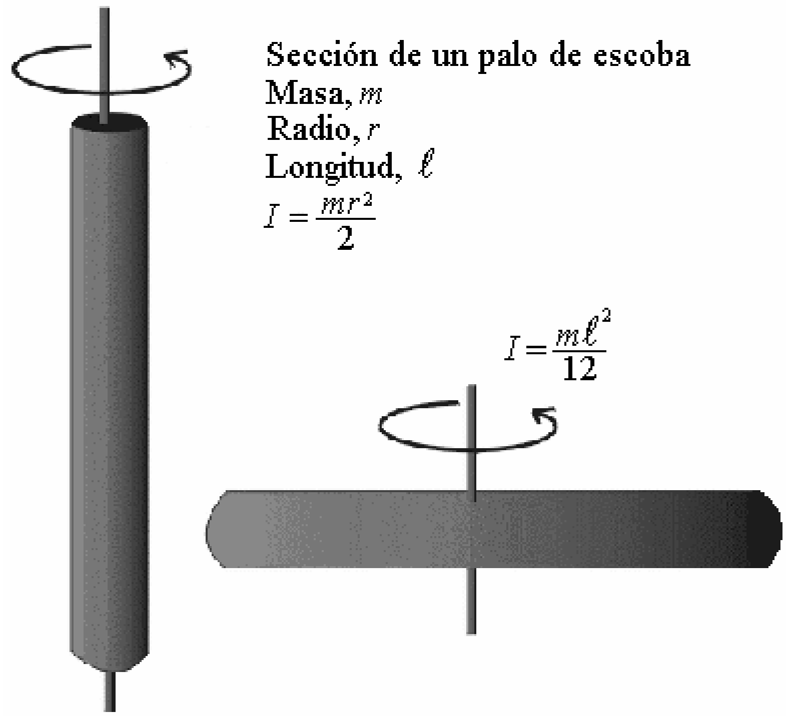

Figura 4 El momento de inercia depende, entre otras variables, de la elección del eje de rotación

<u>Ejemplo 2</u>

La sección del palo de escoba de la figura 4 tiene una longitud de 30 cm, un diámetro de 2.6 cm y una masa de 100 g. Calcular su momento de inercia para giros alrededor de su eje de simetría y perpendicularmente a él. En el segundo caso asuma que el eje de rotación pasa por el punto medio del cilindro, como a la derecha en la figura 4

Soluciones: El momento de inercia para rotación alrededor del eje de simetría del cilindro es,

$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{(0.1 \text{ kg})(\frac{0.026 \text{ m}}{2})^2}{2} = 8.45 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2$$

Si ahora el eje de rotación es perpendicular al eje de simetría del cilindro y pasa por el punto medio de su longitud, el momento de inercia es,

$$I = \frac{m\ell^2}{2} = \frac{(0.1 \text{ kg})(0.3 \text{ m})^2}{2} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2$$

Notamos que en el segundo caso el momento de inercia es unas 500 veces más grande que en el primero. Esto pone de manifiesto que la inercia de un cuerpo a mantenerse girando depende no sólo de su masa sino también de cómo está distribuida esta alrededor del eje de rotación. Mientras más compacta es la distribución de masa alrededor del eje, menor es el momento de inercia y menor será el torque necesario para cambiar la velocidad angular del cuerpo que gira

Ejemplo 3

El momento de inercia, I, de un disco sólido, de densidad uniforme, radio R, y masa m está dado por,

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$

Calcule I con m = 1.5 kg y R = 6 cm

Solución:

$$I = \frac{1}{2}(1.5 \text{ kg})(0.06 \text{ m})^2 = 2.70 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2$$

Ejemplo 4

El momento de inercia, I, de un aro sólido de masa m, radio interno r_1, y radio externo r_2 está dado por,

$$I = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$$

Calcule I con m = 2 kg, r_1 = 10 cm y r_2 = 12 cm

Solución:

$$I = \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(0.1^2 \text{ m}^2 + 0.12^2 \text{ m}^2) = 24.4 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2$$

En este ejercicio de laboratorio vamos a familiarizarnos con el movimiento de rotación. Primeramente veremos cómo un disco pesado, en rotación, gira con velocidad angular constante mientras no le apliquemos un torque externo. Esto es algo similar a lo que hicimos en un ejercicio anterior en donde un carrito viajaba sobre una pista recta horizontal, con velocidad constante, en ausencia de fuerzas externas. En seguida veremos cómo la aplicación de un torque externo, cuyo valor constante es conocido, produce un aumento uniforme en la velocidad angular del disco. Con los datos obtenidos en el segundo ejercicio, deduciremos el valor del momento de inercia del objeto. El aparato que usaremos es similar al que mostramos en la figura 5

Rotación con aceleración angular constante

En este ejercicio vamos a medir la aceleración del disco pesado cuando le aplicamos un torque externo. Ver la figura 5. El torque externo lo produce la tensión en una cuerda que sostiene a un objeto que cae, y está atada a un carrete en el eje de giro. Para calcular su valor usamos la definición $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{T}$. Ver la figura 6. El brazo de palanca, $\mathbf{r}$, y la tensión en la cuerda, $\mathbf{T}$, son perpendiculares entre sí por lo tanto τ

$= rT$, siendo r el radio del carrete donde se encuentra arrollado el hilo en el eje de giro y T, la tensión en el hilo que sostiene al objeto que cae

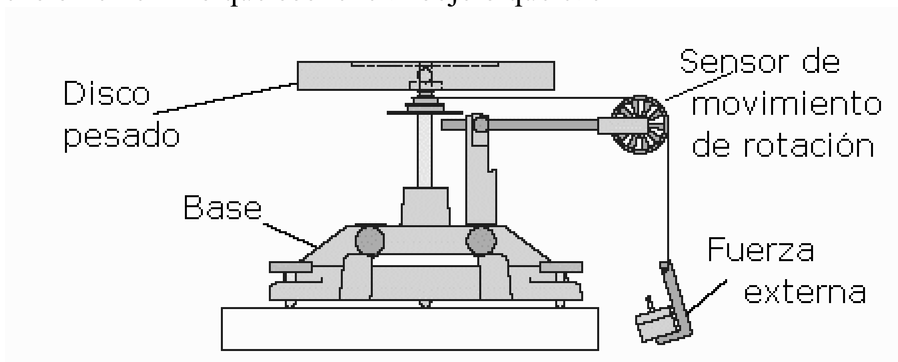

Figura 5 Aparato para el experimento de movimiento de rotación

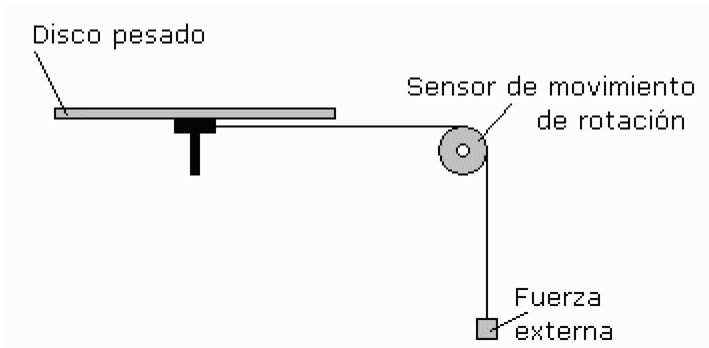

Figura 6 Rotación del disco pesado con aceleración constante

Por otro lado, $\tau = I\alpha$, con I el momento de inercia del disco pesado y α, su aceleración angular. Obtendremos la gráfica de velocidad angular vs. tiempo y, de su pendiente, deduciremos la aceleración angular, α

El análisis dinámico del sistema es el siguiente,

$$T - mg = -ma$$

donde T es la tensión en la cuerda y m, la masa del objeto que cae más la del porta pesas que lo sostiene. La aceleración, a, con la que el cuerpo cae, es la misma que la aceleración tangencial de cualquier punto en el perímetro del carrete, es decir, $a = a_T = \alpha r$. Por otro lado, como

$$\tau = I\alpha = r\,T = rm(g - a) = rm(g - \alpha r)$$

podemos despejar el momento de inercia I, y expresarlo en cantidades conocidas, o medidas en el experimento, por lo tanto,

$$I = mr^2\left(\frac{g}{\alpha r} - 1\right)$$

Identificaremos este valor como el momento de inercia del disco pesado, medido en el laboratorio, mientras que al valor obtenido de la ecuación $I = \frac{1}{2} MR^2$, le llamaremos el momento de inercia teórico, o el valor que se reporta en la literatura.

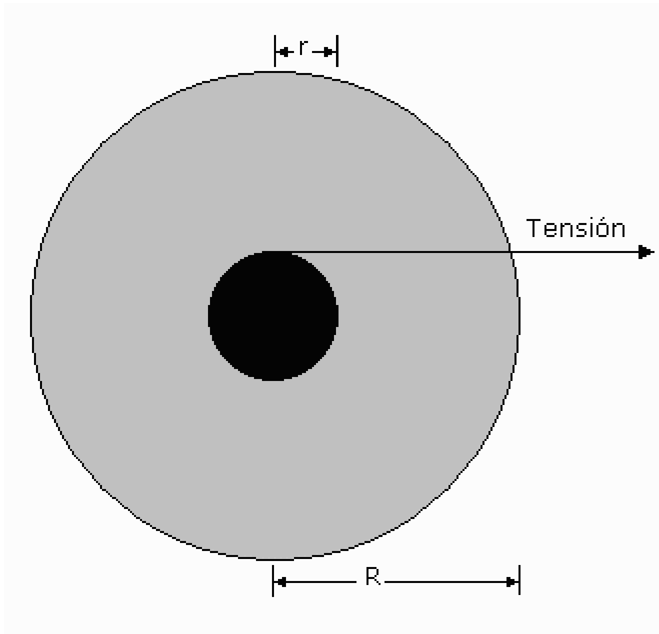

Figura 7 El disco pesado, visto por abajo, tiene un carrete con la cuerda atada a él

Materiales

Sensor de movimiento
Trípode y varilla
Masa y porta masa
Hilo

Procedimiento

1. Asegúrese de que en su mesa está el equipo de la figura 5 con 150 g en el porta pesas, el hilo recogido en el carrete, el disco pesado descansando sobre el aparato y sujeto para impedir que el peso caiga
2. Asegúrese que el hilo está tenso, horizontal y alineado con la polea del sensor de movimiento de rotación
3. Encienda la computadora e inicie el programa *DataStudio*
4. Conecte el sensor de movimiento circular en los canales 1 y 2 de la interfaz, con el conector amarillo en el canal 1
5. Instale el sensor de movimiento circular en la interfaz virtual y dé dos pulsaciones del botón izquierdo del ratón en el icono del sensor. Como resultado se abre la ventana de *Propiedades del Sensor*, con tres pestañas. En la primera pestaña, rotulada *General*, escoja 20 Hz en la *Frecuencia de muestreo*. En la segunda pestaña, rotulada *Medida*, escoja velocidad angular canales 1 y 2 (rad/s), y en la tercera pestaña, rotulada *Sensor de movimiento circular*, escoja *Polea grande (garganta)*
6. Abra una gráfica en la pantalla de la computadora y escoja velocidad angular vs. tiempo. Oprima el botón virtual de *Inicio*, y deje que el peso caiga. El disco pesado debe empezar a girar, arrastrado por el peso que cae. Tenga cuidado de

detener el disco antes de que el peso golpeé el piso, de lo contrario, el hilo se enredará en el eje del aparato y será difícil removerlo. Oprima el botón virtual de *Detener*

7. Seleccione la parte de la gráfica donde la velocidad angular fue en aumento. Esto está caracterizado por su forma recta e inclinada. Obtenga la pendiente de esa sección, que es la aceleración angular del disco pesado en rad/s^2
8. Calcule el momento de inercia teórico del disco pesado y el medido
9. Incluya ambos valores en el informe y su incertidumbre relativa porcentual
10. Retire el disco pesado del aparato y substitúyalo por el aro
11. Repita los pasos 6 y 7 con el aro
12. Escriba la información necesaria para completar la tabla 1 de datos que se pide en el informe
13. Escriba la información necesaria para completar la tabla 2, del informe, con las aceleraciones angulares que obtuvo en el paso 7 de este procedimiento
14. Escriba la información necesaria para completar la tabla 3 de datos que se pide en el informe

Preguntas

Contestar correctamente antes de hacer el experimento

1. La masa, en el movimiento de traslación, parea con _________ en el movimiento de rotación
   a. La cantidad de materia
   b. El momento angular
   c. El torque
   d. El momento de inercia o
   e. La rotación en sí

2. Las unidades de la aceleración angular son:
   a. m/s^2
   b. m/s
   c. Hz/s^2
   d. rad/s^2
   e. rad/s

3. El torque es a la rotación como _______________ es a la traslación
   a. La aceleración
   b. La fuerza
   c. El momento angular
   d. El producto vectorial
   e. La segunda ley de Newton

4. El torque se define como
   a. La fuerza
   b. El producto escalar de fuerza y brazo de palanca
   c. $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
   d. Momento de inercia
   e. Una variable del movimiento de traslación

5. Las unidades del torque son:
   a. J
   b. N
   c. kg m^2/s^2
   d. kg m/s
   e. lb ft/s

6. La aceleración tangencial se calcula como
   a. $\alpha \times \boldsymbol{r}$
   b. $\omega \times \boldsymbol{r}$
   c. $\omega \times \boldsymbol{v}$
   d. $\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$
   e. $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

7. El producto vectorial de dos vectores da como resultado
   a. Un escalar
   b. Un número complejo
   c. Un vector
   d. Otro vector, paralelo a los dos vectores originales
   e. El torque

8. La dirección del vector que resulta del producto vectorial de dos vectores se determina
   a. Por la rotación del objeto
   b. Por la regla de la mano derecha
   c. Por la dirección de las manecillas del reloj
   d. Según cada caso, por el tamaño de cada vector
   e. Al azar

9. La magnitud del producto vectorial de dos vectores mutuamente perpendiculares es
   a. Cero
   b. Igual al producto de las magnitudes de los vectores
   c. La unidad, porque sen 90° = 1
   d. Infinito
   e. Un tercer vector, paralelo a uno de los vectores originales

10. El momento de inercia de un cuerpo se manifiesta como
    a. La tendencia del cuerpo a mantener su movimiento rectilíneo
    b. La oposición del cuerpo a cambiar su estado de movimiento de rotación
    c. Su masa
    d. La fuerza que se necesita para moverlo
    e. El producto de fuerza por distancia

11. El torque puede calcularse como
    a. El producto $I\omega$
    b. El producto ma
    c. Un producto escalar
    d. El producto $I\alpha$
    e. Si fuera un momento de inercia

12. El momento de inercia de un cuerpo depende no sólo de su masa sino también de
    a. La elección del eje de giro
    b. La magnitud del torque aplicado
    c. La dirección del torque aplicado
    d. La rapidez angular con la que el cuerpo gira
    e. Su aceleración

13. Tenemos un disco sólido y un aro con la misma masa y diámetro. Comparativamente con el disco, el aro tiene
    a. Mayor momento de inercia
    b. Menor momento de inercia
    c. El mismo momento de inercia
    d. Mayor torque
    e. Menor torque

14. En el experimento de rotación pudimos notar que el objeto con mayor momento de inercia tuvo
    a. Mayor aceleración angular
    b. Mayor inercia
    c. Menor aceleración angular
    d. Menor masa
    e. Mayor fuerza

15. En una gráfica de velocidad angular vs. tiempo la aceleración angular es
    a. El área bajo la curva
    b. El área sobre la curva
    c. Lo que leemos directamente en el eje vertical
    d. La pendiente de la curva
    e. Lo que leemos directamente en el eje horizontal

Informe del Experimento 8. Movimiento de rotación

Sección_______ Mesa _______

Fecha: ____

Estudiantes:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

Tabla 1. Datos y cálculos

Variable	Valor
Radio del carrete, r	2.54 cm
Radio del disco pesado, R	
Masa del disco pesado, M_d	
Momento de inercia teórico del disco pesado, $I_d = ½\ M_dR^2$	
Radio interior del aro, R_1	
Radio exterior del aro, R_2	
Masa del aro, M_a	
Momento de inercia teórico del aro, $I_a = ½\ M_a(R_1^2 + R_2^2)$	
Masa en el porta pesas + masa del porta pesas, $m + m_p$	

Tabla 2. Aceleraciones angulares

Disco pesado, α_d	
Aro, α_a	

Tabla 3. Momentos de inercia

Objeto	Medido (kg-m^2)	Teórico (kg-m^2)	Δ%
Disco pesado	$I = (m + m_p) r^2 \left(\frac{g}{\alpha_d r} - 1 \right) =$		
Aro	$I = (m + m_p) r^2 \left(\frac{g}{\alpha_a r} - 1 \right) =$		

Conclusiones