Experimento 2

SUMA DE VECTORES

Objetivos

1. Usar la mesa de fuerzas para equilibrar un punto mediante la aplicación de tres fuerzas concurrentes conocidas
2. Encontrar la resultante de estas fuerzas usando:
    a. El método del polígono (método geométrico),
    b. El método por componentes (método analítico), y
    c. La ley de los cosenos (método trigonométrico)

Teoría

A diferencia de cantidades tales como el tiempo, la temperatura y la masa, que son escalares, las fuerzas son cantidades vectoriales. Para definirlas se necesita especificar su magnitud así como su dirección. Este carácter vectorial hace que la suma de las fuerzas se convierta en un proceso diferente al usado para sumar números o escalares. En este ejercicio de laboratorio se efectuará una suma vectorial de tres fuerzas concurrentes conocidas, usando tres métodos diferentes. En cada uno de estos métodos se representarán las fuerzas con flechas. Al dibujar las flechas, se hará de tal forma que su longitud sea proporcional al valor de la fuerza, mientras que su orientación señalará la dirección

<u>Ejemplo 1</u>

Un libro, cuyo peso es de 10 N, se encuentra en reposo sobre una mesa (N representa newton, que es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional de Unidades, abreviado SI. Un newton equivale, aproximadamente, a un cuarto de libra). Ver la figura 1

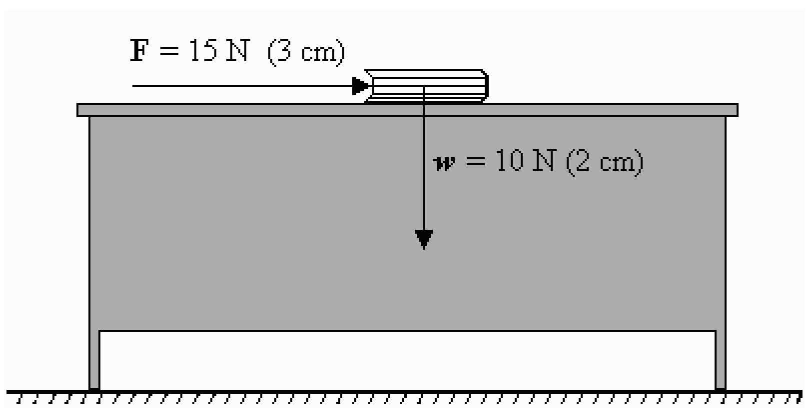

Figura 1 Los vectores se representan con flechas

Note que la flecha representando el vector ***w*** tiene una longitud aproximada de 2 cm, y apunta en la dirección del peso del libro. En este caso se ha elegido una escala tal que 10 N corresponden a 2 cm. Si se aplicara una fuerza horizontal, **F**, de 15 N, para empujar el libro hacia la derecha, esta fuerza estaría representada por una flecha paralela a la superficie de la mesa, con una longitud de 3 cm, ya que cada 5 N equivalen a 1 cm en la escala escogida. Observe que cuando se usa una letra para referirse a un vector ésta se escribe más oscura, para distinguirla de los escalares. ¿Qué longitud tendría una flecha para representar a un vector de 100 N si se usara la misma escala de 5 N por centímetro?

Ejemplo 2

Asuma que la fuerza necesaria para levantar el peso de una persona adulta es de aproximadamente 600 N. En la escala que se usó en el Ejemplo 1, la longitud de la flecha que representaría a esta fuerza sería de $\dfrac{600\ \text{N}}{5\ \dfrac{\text{N}}{\text{cm}}} = 120\ \text{cm}$. Claramente en este caso, debido a que en una hoja de papel de maquinilla no tendríamos suficiente espacio para dibujar una flecha de esta magnitud, se debe modificar la escala y asumir, por ejemplo, 1 cm por cada 100 N, con lo cual la longitud de la flecha se reduciría a sólo 6 cm. La elección de una escala es asunto de conveniencia para quien quiera usar flechas para dibujar vectores en un espacio limitado al tamaño del papel

Método del polígono para sumar vectores

Este método es geométrico. Se describe a continuación mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Sean A = 10 N, B = 15 N y C = 5 N tres vectores tales que **A** apunta directamente hacia la derecha, **B** hacia arriba y **C**, 45º hacia abajo de la horizontal y hacia la izquierda. Note que cuando nos referimos solamente a la magnitud de los vectores los escribimos con trazo delgado. Se quiere representar estos vectores mediante flechas

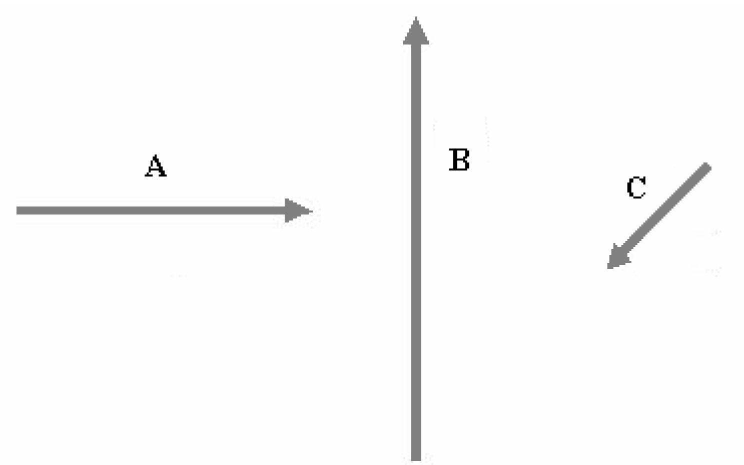

Figura 2 Tres fuerzas A, B, y C representadas por flechas

El primer paso consistirá en elegir una escala conveniente que permita convertir los néwtones a centímetros. Sean 2.5 N = 1 cm. Con esta escala, las longitudes de las flechas que representarán a los vectores **A**, **B** y **C** serán: longitud de **A**, $\dfrac{10\ \text{N}}{\dfrac{2.5\ \text{N}}{1\ \text{cm}}} = 4\ \text{cm}$, longitud de **B**, $\dfrac{15\ \text{N}}{\dfrac{2.5\ \text{N}}{1\ \text{cm}}} = 6\ \text{cm}$, y longitud de **C**, $\dfrac{5\ \text{N}}{\dfrac{2.5\ \text{N}}{1\ \text{cm}}} = 2\ \text{cm}$

Ver la figura 2

La suma **R** = **A** + **B** + **C** es un nuevo vector, el cual se llamará resultante y se representará con **R**. Dicha resultante se encuentra luego de unir el comienzo del vector **A** con el final del vector **C**, una vez que los vectores **B** y **C** se han trasladado de su posición original a nuevas posiciones en las cuales el comienzo de **B** se une al final de **A**, y el comienzo de **C**, al final de **B**. Ver la figura 3

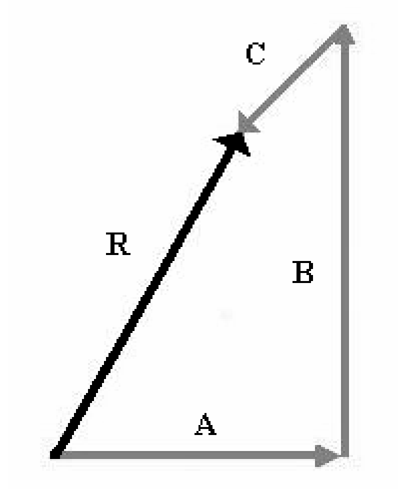

Figura 3 Las mismas fuerzas A, B y C, formando un polígono con la resultante R

La magnitud de la resultante se encuentra midiendo la longitud de **R** y convirtiéndola a newton. En este ejemplo la longitud medida es de 5.2 cm, lo que equivale a 13 N. Para determinar la dirección de **R** se mide con un transportador el ángulo entre **A** y **R**. Su valor es de 60º. Es evidente que el uso de este método requiere papel, lápiz, utensilios de geometría y habilidad para dibujar, medir y usar dichos utensilios correctamente. El método es muy sencillo pero requiere la inversión de tiempo, y su precisión no es muy buena. En la siguiente sección veremos cómo sumar estos mismos vectores de una manera más fácil, precisa y rápida

Método por componentes

En este método analítico se descompone cada vector en dos componentes perpendiculares entre sí, según ilustraremos en el ejemplo 4

Ejemplo 4

Sean nuevamente los vectores **A**, **B** y **C** del ejemplo 3. El primer paso para sumar analíticamente estos tres vectores consiste en definir un sistema de coordenadas cartesianas, gracias al cual se especificará la dirección de cada vector. Note que en este método todos los vectores se colocan con su extremo inicial en el origen. Ver la figura 4. Se descompondrá cada uno de estos vectores en sus componentes horizontales y verticales. Para hacer esto considérese la figura 5. En esta figura se muestra el vector **F** localizado en un sistema coordenado cartesiano. La magnitud del vector es proporcional a la longitud de la flecha, mientras que su orientación está determinada por el ángulo θ que el vector hace con el lado positivo del eje $\boldsymbol{x}$. Observe que el triángulo O*ab* es recto en el vértice *a*. El lado O*a* es el cateto adyacente al ángulo θ. El lado *ab* es opuesto al ángulo θ, y el segmento O*b* es la hipotenusa del triángulo. El segmento *ab* es paralelo al eje $\boldsymbol{y}$, y el *cb*, paralelo al eje $\boldsymbol{x}$. Se ha designado como F_x al segmento *Oa*, F_y al *ab*, y **F** a la flecha *Ob*

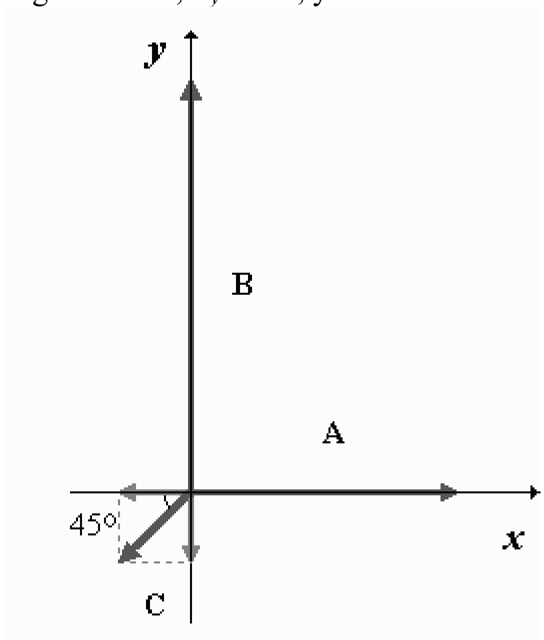

Figura 4 Los vectores A, B y C referidos a un sistema de coordenadas cartesiano

Por trigonometría elemental tenemos que, $F_x = F\cos\theta$ y $F_y = F\,\mathrm{sen}\theta$, donde F_x y F_y se conocen como las componentes cartesianas del vector **F**. Ahora usaremos estas ecuaciones para encontrar las componentes de los vectores **A**, **B** y **C**. Los ángulos que estos vectores hacen con el lado positivo del eje $\boldsymbol{x}$ son 0º, 90º, y 225º, respectivamente. Recordemos que las magnitudes de **A**, **B** y **C** son 10 N, 15 N y 5 N respectivamente, entonces,

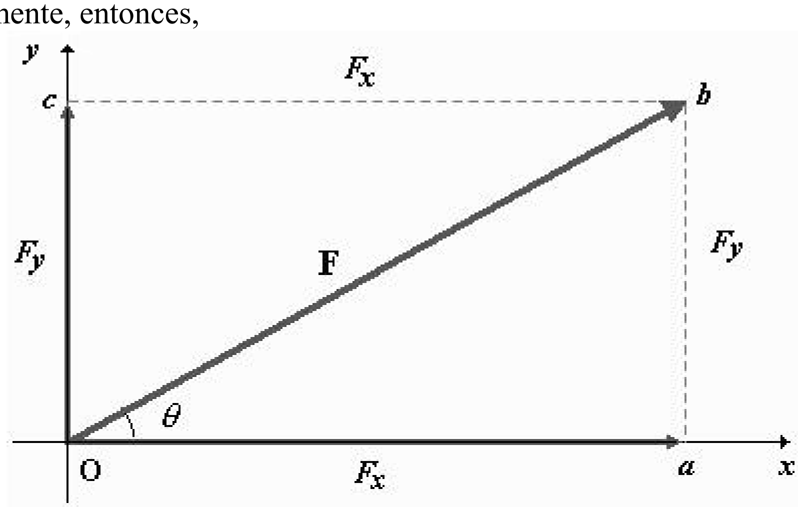

Figura 5 Un vector F es descompuesto en dos componentes mutuamente perpendiculares F_x y F_y

$A_x = 10 \cos 0º = 10$ N, $A_y = 10 \text{ sen } 0º = 0$

$B_x = 15 \cos 90º = 0$, $B_y = 15 \text{ sen } 90º = 15$ N

$C_x = 5 \cos 225º = -3.54$ N, $C_y = 5 \text{ sen } 225º = -3.54$ N

Las componentes a lo largo de cada eje pueden ahora ser tratadas como escalares. Se llamará R_x a la suma de las componentes en el eje ***x***; y R_y a la suma de componentes en el eje ***y***, es decir,

$$R_x = A_x + B_x + C_x = (10 + 0 – 3.54) \text{ N} = 6.46 \text{ N}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = (0 + 15 – 3.54) \text{ N} = 11.46 \text{ N}$$

La figura 6 muestra estas componentes y el nuevo vector **R**, al cual dan lugar. A partir de esta figura notamos que el ángulo θ puede deducirse mediante la función tangente como $\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$, mientras que la magnitud de **R** se obtiene con el teorema de Pitágoras, R = $\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Debemos notar también que los vectores **A**, **B**, **C** y **R** pueden escribirse de la siguiente forma: A = (10, 0), B = (0, 15), C = (-3.54, -3.54) y R = (6.46, 11.46), añadiendo que las unidades asociadas con estos números son newton, N. En este caso, decimos que los vectores están escritos en su representación rectangular. También se acostumbra escribirlos como: **A** = 10 ***i***, **B =** 15 ***j***, **C** = -3.54 ***i*** – 3.54 ***j***, y **R** = 6.46 ***i*** + 11.46 ***j***, donde ***i*** y ***j*** son los llamados vectores unitarios, es decir, con una magnitud igual a la unidad, y paralelos al eje *x* y al eje *y* respectivamente

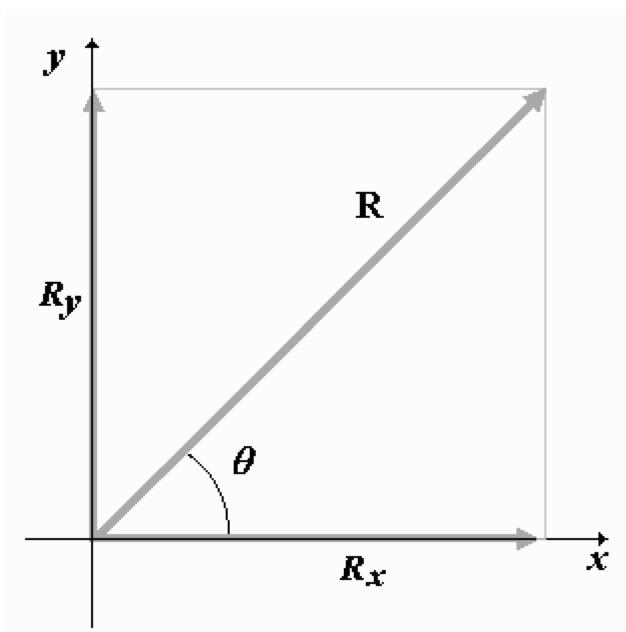

Figura 6 La suma de las componentes R_x y R_y da lugar al vector resultante R

En nuestro caso particular, tan $\theta = \dfrac{R_y}{R_x} = \dfrac{11.46}{6.46} = 1.77$, de donde θ = tan^{-1}1.77 = 60.6°.

Por otro lado, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6.46^2 + 11.46^2} = 13.2N$. Recordemos que por el método del polígono encontramos θ = 60° y R = 13 N. Debemos dejar claro que en el método analítico, o por componentes, no es necesario dibujar los vectores, ni definir una escala para encontrar su longitud. Nosotros los dibujamos en este último ejercicio sólo con fines didácticos

Método de la ley de los cosenos

Este es un método trigonométrico que ilustraremos con el siguiente ejemplo

Ejemplo 5

Sean los vectores **A** y **C** de los ejemplos 3 y 4. Recordemos que **A =** (10 N, 0°) y **C** = (5 N, 90°). La forma en que hemos escrito estos vectores, como un par ordenado de números encerrados entre paréntesis, se conoce como *representación polar*, y consiste en expresar las componentes de los vectores en coordenadas polares. Deseamos encontrar el vector **D** que representa a la suma **A** + **C**. Ver la figura 7. En este método tampoco es necesario dibujar los vectores. Lo hacemos nuevamente, como en el caso analítico, sólo para facilitar su presentación y explicación. La escala tampoco debe preocuparnos

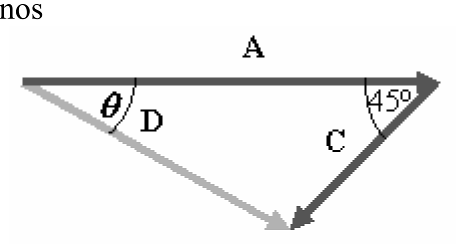

Figura 7 Los vectores A, C y D constituyen un triángulo

Como puede verse, **D** = **A** + **C**, de acuerdo con el método del polígono. En este caso, como se trata de tres vectores solamente, el polígono se reduce a un triángulo del cual se conoce la longitud de los lados A y C, y el ángulo entre ellos. La ley de los cosenos establece que:

$$D^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos 45° = 10^2 + 5^2 - 2(10)\,(5)\,(0.707) = 54.3$$

De donde D = 7.4 N. La dirección del vector resultante **D** se obtiene a partir del valor de θ, el cual calcularemos luego de aplicar nuevamente la ley de los cosenos,

$$C^2 = A^2 + D^2 - 2AD \cos\theta,$$

De donde

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A^2 + D^2 - C^2}{2AD}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{10^2 + 7.4^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 7.4}\right) = 28.7^0$$

Operaciones con vectores usando la calculadora, o la computadora

En la práctica, las operaciones con vectores se hacen usando casi exclusivamente el método por componentes. Por lo general tenemos los vectores en forma polar y debemos sumarlos. El procedimiento consiste en transformarlos a la forma rectangular, sumarlos y convertir el resultado de nuevo a la forma polar

Ejemplo 6

Vamos a sumar los vectores A = (10, 30°), B = (24, 45°) y C = (5, 150°), expresados en forma polar. Usamos la tabla 1

Tabla 1. Suma de vectores por el método de componentes

Representación polar			**Representación rectangular**	
Vector	Magnitud	Dirección	Componente x	Componente y
A	10	30°	A_x = 10 cos 30° = 8.66	A_y = 10 sen 30° = 5.00
B	24	45°	B_x = 24 cos 45° = 16.97	B_y = 24 sen 45° = 16.97
C	5	150°	C_x = 5 cos 150° = -4.33	C_y = 5 sen 150° = 2.50
R	$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=$ $=\sqrt{21.3^2+24.47^2}=$ $=32.44$	$\theta=\tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}=$ $=\frac{24.47}{21.30}=48.86^{\circ}$	$R_x = A_x + B_x + C_x =$ $= 21.30$	$R_y = A_y + B_y + C_y =$ $= 24.47$

El orden en que se hacen las operaciones es el siguiente: 1^{o} Escribimos los nombres de los vectores en la primera columna, 2^{o} Escribimos sus magnitudes en la segunda columna, 3^{o} Escribimos sus direcciones en la tercera columna, 4^{o} Convertimos los vectores a la representación rectangular, y escribimos sus componentes x en la cuarta columna, mientras sus componentes y, en la quinta, 5^{o} Sumamos independientemente las componentes x y las componentes y, y 6^{o} Convertimos las componentes rectangulares del vector resultante a sus componentes polares. La suma de estos tres vectores da por resultado el vector R = (32.44, 48.86°). No cabe duda de que sumar vectores, expresados originalmente en coordenadas polares, es un proceso largo y tedioso. Afortunadamente, la mayoría de las calculadoras comunes, hoy en día en manos de los estudiantes universitarios, son capaces de hacer estas operaciones con suma facilidad. Veamos el caso particular de la calculadora *Texas Instruments* TI-86. Para sumar estos mismos tres vectores simplemente encendemos la calculadora, oprimimos en secuencia las teclas amarilla 2nd → MODE, que abren una pantalla donde se enlistan los diferentes modos en los que trabaja la calculadora, notamos que está seleccionado con un cursor intermitente el modo Normal en la esquina superior izquierda de la pantalla, usamos las flechas del teclado para bajar el cursor a la cuarta línea y luego lo movemos un lugar a la derecha para seleccionar PolarC. Ahora oprimimos las teclas ENTER $\rightarrow$ EXIT. Esto nos regresa a la pantalla original. Aquí escribimos los vectores en su forma polar, entre paréntesis, de la siguiente forma: $(10\angle 30)+ (24\angle 45)+ (5\angle 150)$, oprimimos ENTER y obtenemos $(32.44\ \angle 48.96)$. Este procedimiento es similar al que debe seguirse con otras calculadoras. Cada estudiante debe revisar el manual de operaciones de su calculadora para aprender a manejar vectores con ella, ya que parte de su éxito en este curso dependerá de esta habilidad

En las computadoras del laboratorio hay un programa que permite hacer operaciones con vectores en forma gráfica y algebraica. Para acceder el programa se pulsa el botón izquierdo del ratón sobre el siguiente icono:

A continuación se abre el programa, y el estudiante puede hacer el tutorial que se ofrece. Recomendamos que los estudiantes se familiaricen con este recurso como un medio para mejorar su comprensión de las propiedades de los vectores, y su forma de trabajar con ellos

Materiales

Hilo
Pesas de diferentes valores
Porta pesas
Papel milimetrado de 8 ½” × 11”

Instrumentos

Nivel de burbuja
Triángulos de 45° - 45° y 30° - 60°
Regla métrica de 30 cm, graduada en mm
Transportador

Equipo

Mesa de fuerzas con poleas

Procedimiento

1. La primera actividad en este ejercicio consistirá en lograr que el centro de concurrencia de los tres hilos que soportan a las pesas, en la mesa de fuerzas, se alinee con el centro de la mesa después de haber colocado pesos arbitrarios en los porta pesas. Procure que la masa total en cada porta pesas sea mayor que 100 g pero menor que 500 g. Esto permite ignorar el efecto de fricción en las poleas. Para lograr la alineación pueden intentarse dos acciones:

    a. Relocalizar las poleas en otras posiciones en el perímetro de la mesa de fuerzas, y
    b. Aumentar o disminuir la masa en uno o más de los porta pesas

    Debe tenerse presente que la precisión de los resultados que se obtengan va a ser mayor mientras mejor sea la alineación entre el centro de concurrencia de los hilos y el centro de la mesa. Asimismo, el ejercicio será más provechoso si las masas en los porta pesas no son idénticas. Una vez que se ha logrado la mejor alineación posible, anclamos el anillo en el que están amarrados los hilos, usando una barrita metálica que se le proveerá para ese propósito

2. El perímetro de la mesa de fuerzas está subdividido en grados. En la mesa existe una línea cuya posición corresponde a 0°. Esta línea será designada como el eje x, mientras que la línea que corresponde a los 90° será el eje y. Tome una hoja de papel milimetrado de 8 ½ ” × 11” y elija una escala apropiada que le permita dibujar las fuerzas, o sea, los pesos de las masas en los porta pesas, como flechas en la hoja de papel
3. Seleccione el centro de la hoja de papel milimetrado como el origen del sistema coordenado cartesiano y dibuje los ejes x y y
4. Lea los ángulos que hace cada hilo en la mesa de fuerzas con el eje x y dibuje tres líneas rectas sobre el papel milimetrado de tal forma que cada una de ellas empiece en el origen (centro de la hoja) y subtienda un ángulo igual al del hilo correspondiente. La longitud de cada una de estas líneas deberá ser proporcional al peso que representa. Como dijimos anteriormente, las fuerzas son los pesos de las masas añadidas a los porta pesas más las masas de éstos. Los pesos se obtienen multiplicando las masas por 9.8 m/s^2

Análisis de los datos

1. Use el método del polígono para encontrar la magnitud y dirección del vector resultante de las tres fuerzas. Escriba ambos resultados en el informe de laboratorio. Anexe al informe la hoja de papel milimetrado en la cual se dibujaron los vectores originales y el polígono. Use los dos triángulos de 45^o - 45^o y de 30^o - 60^o para facilitar el traslado de los vectores al formar el polígono
2. Llame **A**, **B** y **C** a las tres flechas que fueron dibujadas en el papel milimetrado. Use la letra **A** para la flecha con el menor ángulo, **B** para la siguiente, yendo en dirección contraria a las manecillas del reloj y **C** para la flecha de mayor ángulo
3. Use la ley de los cosenos para encontrar la resultante de la suma **A** + **B**. Identifique a esta resultante con la letra **D**. Escriba en su informe la magnitud de **D** y el ángulo que hace este vector con el lado positivo del eje x
4. Use nuevamente la ley de los cosenos para sumar **D** y **C**, y llame **R** a este vector resultante. Escriba en su informe la magnitud y dirección de **R**
5. Escriba las magnitudes de los vectores **A**, **B** y **C** en la primera columna de la Tabla 1 del informe. Escriba las direcciones de los tres vectores en la segunda columna. Calcule las componentes x y las componentes y de cada vector y escribirlas en las columnas 3^{ra} y 4^{ta} de la tabla mencionada. Calcule:

   $R_x = A_x + B_x + C_x$ y $R_y = A_y + B_y + C_y$

   y escriba sus valores en el lugar que les corresponde en la tabla del informe

6. Calcule $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ y θ a partir de tan $\theta = \dfrac{R_y}{R_x}$, y escriba sus valores en el informe

Preguntas

Contestar correctamente antes de intentar hacer el experimento

1. Dos vectores concurrentes de magnitudes de 5 N y 12 N, respectivamente, se suman y dan como resultante un nuevo vector con una magnitud de 7 N. El ángulo entre los dos vectores originales es de:
   a. 180°
   b. 90°
   c. 60°
   d. 0°

2. Dos vectores concurrentes cuyas magnitudes son de 30 cm y 40 cm, respectivamente, tienen direcciones mutuamente perpendiculares. La magnitud de la suma de estos dos vectores es de:
   a. 50 cm
   b. 10 cm
   c. 70 cm
   d. 15 cm

3. Los vectores son cantidades que:
   a. Se suman como los números o escalares
   b. Se usan exclusivamente para las fuerzas
   c. Se caracterizan por poseer magnitud y dirección
   d. No tienen magnitud

4. Supongamos que elegimos la escala de 2.5 cm/15 N para dibujar fuerzas. La magnitud de un vector de 75 N es de:
   a. 37.5 cm
   b. 11.25 cm
   c. 5 cm
   d. 12.5 cm

5. Una flecha tiene una longitud de 8 cm en una escala de 20 cm/100 N. Esta flecha representa una fuerza de:
   a. 5 N
   b. 2.5 N
   c. 40 N
   d. 160 N

6. En el método por la ley de los cosenos:
   a. Es necesario definir una escala antes de proceder a la suma
   b. Se pueden sumar solamente dos vectores cada vez

c. Necesitamos usar utensilios de dibujo
d. Debemos calcular las componentes de los vectores

7. Para especificar analíticamente la dirección de un vector se usa:
   a. Su magnitud
   b. El ángulo que hace el vector con el lado positivo del eje *x*, cuando su inicio coincide con el origen del sistema coordenado cartesiano
   c. Un transportador
   d. Una escala

8. Sean dos vectores **A** y **B** cuyas coordenadas polares son: (4, 90°) y (5, 270°). Su suma es:
   a. (1, 180°)
   b. (1, 0°)
   c. (1, 270°)
   d. (9, $\tan^{-1}5/4$)

9. Sean dos vectores **A** y **B** cuyas coordenadas polares son: (20, 90°) y (-15, 180°). Su suma es:
   a. (25, 53°)
   b. (5, 270°)
   c. (25, -37°)
   d. (20, -15)

10. Sean dos vectores **A** y **B** cuyas coordenadas rectangulares son: (-2, 6) y (4, -8). Su suma es:
    a. (2, 2)
    b. (2.83, -45°)
    c. (10, -10)
    d. (-10, 10)

Informe del Experimento 2. Suma de Vectores

Sección_______ Mesa _______

Fecha: ____

Estudiantes:

1. ____

2. ____

3. ____

4. ____

1. **Método del polígono**

   Magnitud de la resultante R = __________________N

   Dirección de la resultante θ = ____________________

2. & 3. **Ley de los cosenos**

   Magnitud del vector D = _______________________N

   Dirección del vector D, θ = ______________________

4. Magnitud del vector R = _______________________N

   Dirección del vector R, θ' = ______________________

5. & 6. **Método por componentes**

Tabla 2. Suma de vectores por el método de componentes

Magnitud del vector	Dirección	Componente-x	Componente-y
A = N		N	N
B = N		N	N
C = N		N	N
R = N		R_x = N	R_y = N

Preguntas del informe

1. ¿Se obtuvieron los mismos resultados con los tres métodos? Explique

2. Si hubo discrepancias en los resultados ¿a qué se debieron?

3. ¿Cuál método sería el más conveniente si el número de vectores fuera grande?

4. ¿Cuál es la magnitud y dirección de un vector cuyas componentes rectangulares son: $F_x = 100$ N, $F_y = 173$ N? Muestre sus cálculos